INVERSA DI UNA APPLICAZIONE LINEARE

Ricordiamo che

$$F : V \to W$$

è invertibile se e solo se è bigettiva.

e questo accade se e solo se

$$\dim V = \dim W$$

e $\operatorname{Ker} F = \{0\}$

(in questo caso $\operatorname{Ker} F = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Im} F = W$

per il teorema $\dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F =$
$= \dim V$)

SUPPONIAMO ORA DI AVERE

$$F : V \to V \quad \text{INVERTIBILE}$$

e sia $[F]_{\substack{v_1\ v_n \\ v_1\ v_n}}$ la sua

matrice rispetto alla base $v_1, , v_n$ di V. Chiamiamo F^{-1} l'inversa di F. Come possiamo trovare

$$[F^{-1}]_{\substack{v_1\ v_n \\ v_1\ v_n}} \quad ?$$

ALGORITMO $\quad V = \mathbb{R}^3$

$$[F]_{\substack{v_1 v_3 \\ v_1 v_3}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Per trovare A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ora cerco, con mosse di RIGA, DI portare questa matrice nella forma

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

B sarà l'inversa cercata

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

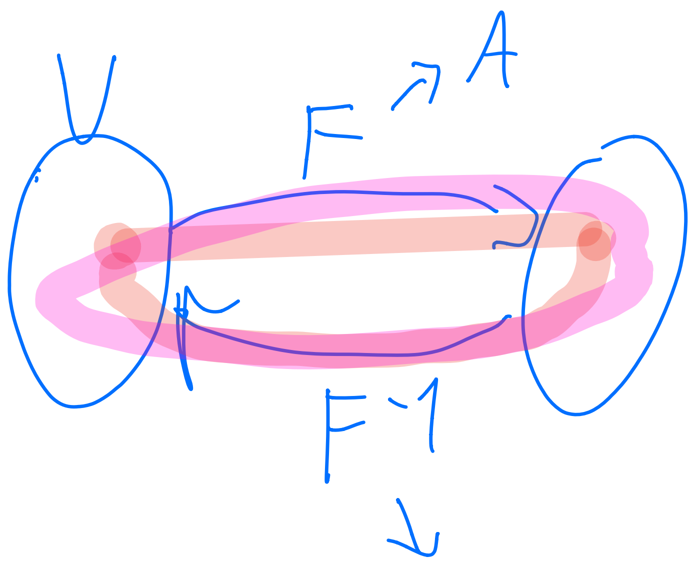
Verifica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dunque B è l'inversa di A

(vale anche $BA = Id$)



$BA = Id$

$AB = Id.$

Come mai l'algoritmo funziona?

Rileggiamo le mosse di riga.

$$\begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{A}{\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\\0&1&4\end{pmatrix}}$$

se voglio sommare alla I riga

5 · III RIGA basta che

moltiplichi A <u>a sinistra</u>

per $\begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

In generale se voglio sommare alla riga i di A la riga j moltiplicata per λ posso farlo moltiplicando A a sinistra per la matrice

$$\left(b_{km} \right)$$ dove

$$b_{kk} = 1 \qquad b_{ij} = \lambda$$

il coeff in riga i colonna j

tutti gli altri $b_{km} = 0$

Scambiare due righe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A}$$

se voglio scambiare le righe II e III basta che moltiplichi A a sinistra per

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le matrici che ho usato sono invertibili

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \lambda \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 8 \end{pmatrix}$$

Dunque riassumendo:

per portare A nella forma a scalini desiderata basta:

$$U_{11} \cdots\cdots U_3 \, U_2 \, U_1 \, A$$

moltiplicarla a sinistra per varie matrici invertibili

$$\underbrace{U_m \cdots U_3 U_2 U_1}_{U}$$

U è invertibile perché:

$$\underbrace{U_m U_3 \quad U_1}_{U} \underbrace{U_1^{-1} U_2^{-1} \quad U_m^{-1}}$$

Cioè moltiplicarla a sinistra per una matrice invertibile U

Torniamo all'algoritmo per trovare l'inversa di A

$$(A \mid I)$$

$\downarrow$ con mosse di riga arrivo a

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{invertibile}}}{U}\,(A \mid I) = (\underset{\substack{\uparrow \\ UA}}{I} \mid \underset{\substack{\uparrow \\ U \cdot I}}{B})$$

cioè $B = U$ è l'inversa di A

Per le matrici 2×2 l'inversa

Conviene impararla a memoria:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Osservo che è invertibile se e solo se $\det A = ad - bc \neq 0$

Vale che

$$A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Verifica

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-dc & ad-bc \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

CAMBIAMENTO DI BASE

Esercizio

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

l'applicazione lineare tale che

$$F\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \epsilon_1$$

$$F\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \epsilon_2$$

(È ben definita perché $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{v_2}$ è base di $\mathbb{R}^2$)

Scrivere

(sia e_1, e_2 la base standard)

$$[F]_{\substack{st \\ st}} = \begin{array}{cc} Fe_1 & Fe_2 \\ \hline \end{array}$$

$$[F]_{\substack{st \\ st}} = \begin{array}{cc} Fe_1 & Fe_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$[F]_{\substack{v_1, v_2 \\ e_1, e_2}} = \begin{array}{cc} Fv_1 & Fv_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$[F]_{\substack{v_1, v_2 \\ v_1, v_2}} = \begin{array}{cc} Fv_1 & Fv_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$F v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{st} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{v_1, v_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} =$$

$$= 2 \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} - 1 \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$F v_2 = e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{st}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} + \beta \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = F \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{per linearità}}}{=} F\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 2F\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}_{st} - 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{st}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{st}$$

Data $F: V \to V$ ENDOMORFISMO,

OCCUPIAMOCI IN PARTICOLARE

DEI CAMBIAMENTI DI BASE

$$[F]_{\substack{v_1 \quad v_n \\ v_1 \quad v_n}} \qquad\qquad [F]_{\substack{w_1 \quad w_n \\ w_1 \quad w_n}}$$

Come sono legate queste due matrici?

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "Id."] & V \arrow[r, "F"] & V \arrow[r, "Id"] & V \\
v_1 \ v_n \arrow[rrr, bend right] & w_1 \ w_n & w_1 \ w_n & v_1 \ v_n
\end{tikzcd}
$$

F è la funzione composta

Per un teorema noto:

$$
[I \circ F \circ I]_{\substack{v_1 \ v_n \\ v_1 \ v_n}} = [I]_{\substack{w_1 \ w_n \\ v_1 \ v_n}} [F]_{\substack{w_1 \ w_n \\ w_1 \ w_n}} [I]_{\substack{v_1 \ v_n \\ w_1 \ w_n}}
$$

$$
\parallel
$$

$$
[F]_{\substack{v_1 \ v_n \\ v_1 \ v_n}}
$$

Riassumendo

$$[F]_{\substack{v_1 \; v_n \\ v_1 \; v_n}} = [I]_{\substack{w_1 \; w_n \\ v_1 \; v_n}} [F]_{\substack{w_1 \; w_n \\ w_1 \; w_n}} [I]_{\substack{v_1 \; v_n \\ w_1 \; w_m}}$$

$$[I]_{\substack{v_1 \; v_n \\ w_1 \; w_m}} = \begin{array}{cccc} Iv_1 & Iv_2 & & Iv_n \\ \left(\begin{matrix} | \\ | \\ | \end{matrix} \right. & \begin{matrix} | \\ | \\ | \end{matrix} & & \left. \begin{matrix} | \\ | \\ | \end{matrix} \right) \end{array}$$

i coeff di v_1 rispetto alla base $w_1, , w_m$

$$\Big(\quad \Big)_{w_1 \; w_m}$$

Ora osservo che:

$$
\begin{tikzcd}
\underset{v_1 \; v_n}{V} \arrow[r, "I"] \arrow[rr, bend right, "I"'] & \underset{w_1 \; w_n}{V} \arrow[r, "I"] & \underset{v_1 \; v_n}{V}
\end{tikzcd}
$$

$$
[I]_{\substack{v_1 \, v_n \\ v_1 \, v_n}} = [I]_{\substack{w_1 \, w_n \\ v_1 \, v_n}} \, [I]_{\substack{v_1 \, v_n \\ w_1 \, w_n}}
$$

$$
\|
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}
$$

la chiamo M

Dunque $[I]_{\substack{w_1\, w_n \\ v_1\, v_n}}$ è M^{-1}

In conclusione

$$\underbrace{[F]_{\substack{v_1\, v_n \\ v_1\, v_n}}}\ = M^{-1}\,[F]_{\substack{w_1\, w_n \\ w_1\, w_n}}\, M$$

dove M si chiama "matrice di cambio di base" da $v_1 \; v_n$ a $w_1 \; w_n$

<u>Esercizio</u> Sia F : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$[F]_{\substack{st \\ st}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Scrivere $[F]_{\substack{v_1,v_2\\ v_1,v_2}}$ dove.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SI PUÒ FARE COL METODO TRADIZIONALE

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} Fv_1 & Fv_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad \end{array}\right) \end{array}$$

OPPURE SI PUÒ FARE CON LA MATRICE M

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$ per la formuletta

allora

$$[F]_{\substack{v_1 v_2 \\ v_1 v_2}} = \overset{M^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}} \overset{[F]_{\substack{xt \\ xt}}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \overset{M}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -11 & -5 \end{pmatrix}$$